


Induktionsproblem

1. På tavlan står två tal uppskrivna: 1, 1. Sedan skriver man in talens summa emellan dem, det blir 1, 2, 1. Sen gör man det en gång till, det vill säga alla grannantal får sin summan emellan sig, det blir 1, 3, 2, 3, 1. Efter tre operationer får man talen 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. Vad blir summan av alla tal som kommer stå på tavlan efter 100 sådana operationer?

2. En hörnruta klipps bort av en rutig kvadrat av storlek 128×128 . Visa att resten av kvadraten kan delas upp i trerutiga vinkelhakar. (Såna

här som man får vrida och vända på )

3. Visa att en kvadrat kan delas upp i n mindre kvadrater för alla $n \geq 6$.
4. Talet $x + \frac{1}{x}$ är ett heltal. Visa att talen $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^4 + \frac{1}{x^4}$, $x^8 + \frac{1}{x^8}$... osv också är heltal.
5. Visa att för alla $n \geq 3$ går det att hitta n olika positiva heltal så att deras summa är delbar med vart och ett utav de heltalen.
6. Vi betraktar alla bråk med täljaren 1 och nämnaren som är ett positivt heltal, det vill säga talen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Visa att man kan uttrycka 1 som en summa av n stycken sådana olika bråk, för $n \geq 3$. T.ex. för $n = 3$ kan vi ta:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

7. På gränsen till en öken står en bil och bredvid finns en bensinstation med godtyckligt mycket bensin. Bilen har också tillgång till godtyckligt många bensintankar, som man kan fylla upp med bensen från bilen och lämna ute i öknen var man vill (för att kunna använda det sedan). Om bilen är fullt tankad, klarar den att åka 50 km. Visa att bensen kan komma fram hur långt som helst ut i öknen.
8. Några räta linjer och cirklar är ritade på ett plan. De delar planet i ett antal delar. Visa att man kan måla delarna i två färger på så sätt att vilka som helst två delar som har en gemensam gräns är målade olika.