

## Tvåpotenser

**Startproblem.** Du har 127 enkronorsmynt och 7 tomma plånböcker, och du måste lägga in alla mynten i plånböckerna. Om någon ber dig om en summa pengar, skall du kunna ge dem några plånböcker, så att det tillsammans i dem finns precis så många kronor som det frågades efter. Hur skall du fördela mynten mellan plånböckerna på så sätt att du kan ge ut vilken summa under 128 kronor som helst utan att öppna dem, om någon ber om det?

*Talet  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$  med  $n$  stycken tvåor betecknas  $2^n$  och utläses "2 upphöjt till  $n$ ". Alla sådana tal kallas med ett ord **tvåpotenser**.*

**Kontrollfråga:** Vad är  $2^0$  lika med?

- (a) Räkna ut  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10}$ .

(b) Hur kan man skriva summan  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$  utan att skriva "... " (eller använda summatecknet  $\sum$ )?
- Vilken siffra slutar  $2^{50}$  på?
- (a) När  $2^{200}$  delas på 3 med rest, vad blir resten lika med?

(b) Går att byta plats på siffrorna i en tvåpotens, så att en annan tvåpotens bildas?
- På en skola går 300 elever. Minst en av dem kommer att vara med idrottsdagen. På hur många sätt kan uppslutningen på idrottsdagen se ut? (Sätt där inte exakt samma elever närvarar räknas som olika).
- Du har två symboler:  $\odot$  och  $\triangle$ . Du vill koda varje bokstav i det svenska alfabetet med ett "ord" bestående av dina symboler. Du vill ha dina "ord" så korta som möjligt. Hur många bokstäver kommer då ditt längsta "ord" att ha?
- Bilda en tvåpotensromb på följande sätt: skriv först ut en 1:a, under den två 2:or, sedan tre 4:or och så vidare. Varje rad innehåller en siffra mer och värdet fördubblas. Du fortsätter öka potenserna, men någonstans slutar du göra raden bredare och skriver istället färre och

färre tvåpotenser per rad. Den sista raden innehåller ett enda tal, som är det största i "romben".

Här är ett exempel där 8 står där det är som bredast:

1  
2 2  
4 4 4  
8 8 8 8  
16 16 16  
32 32  
64

Visa att summan av alla talen i "romben" är ett kvadrattal (Inte bara för den ovan, utan för vilken storlek som helst).

**Diskussionsproblem.** Låt oss säga att du och en kompis spelar om pengar. Du satsar en viss summa pengar och din kompis singlar en slant. Om det blir krona, får du den dubbla insatsen tillbaka. Om det däremot blir klave, förlorar du allting.

Du kommer på en strategi som du tror alltid ger vinst. Satsa nämligen först en krona. Antingen så vinner du direkt, eller så förlorar du, i vilket fall du lägger in 2 kronor istället. Vinner du efter det, får du 2 kronor extra. Du har tidigare förlorat 1 krona, så totalt blir det 1 krona vinst. Det kan hända att du förlorar din insats på 2 kronor. Då satsar du 4 kronor nästa gång. Vinner du, så har du totalt sett vunnit en krona. Fortsätt sedan på samma sätt med större insatser tills du vinner, vilket är väldigt sannolikt att göra på några första försök.

Upprepa den här strategin precis precis så många gånger som antalet kronor du vill bli rikare. Fungerar detta eller inte och varför?