Mattecirkel *från matteblogggen.com*

Polynom och nollställen

Definition. Ett **polynom** (i x) är ett uttryck som kan fås av reella tal och en variabel x genom addition, subtraktion och multiplikation (t.ex. $7x^4+3x^4$, $(1+2x)(3-0,5x)$, x^3-2x^2+3x-4). Om man adderar, subtraherar eller multiplicerar två polynom så får man fortfarande ett polynom. Ett polynom kan entydigt skrivas **på standardform:** $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, där alla a_i är tal, $a_n \neq 0$. Termen a_nx^n kallas då **högstagradstermen** och n kallas **polynomets grad**. Två polynom räknas som lika om de ger samma värde för viket som helst värde på x, det vill säga att de är lika som funktioner. Ett **nollställe** är ett värde på x sådant att polynomets värde är lika med 0.

1. Kontrollera utan att utveckla att $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \neq (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
2. Man multiplicerar två polynom, som är båda skilda från 0, med varandra. Kan det hända att samtliga termer tar ut varandra?
3. Polynom på båda led är lika med varandra: $(x^2-1)(x+\ldots) = (x-1)(x+3)(x+\ldots)$. En bråkstake har bytt ut två tal mot punkter. Återställ talen.
4. Låt P(x) vara en produkt av två polynom: *P(x)=Q(x)R(x).* Visa att vilken som helst av *P(x):s* nollställen antingen *är Q:s* eller *R:s* nollställe.
5. Låt *a* vara ett nollställe till ett polynom *P(x).* Visa att det då finns det ett polynom *Q(x)* sådant att *P(x)=(x–a)Q(x).*
6. Visa att polynom av grad *n* kan ha högst *n* nollställen.
7. Visa att *a* och *b* är två nollställen till $x^2+px+q \Leftrightarrow p=-(a+b),\ q=ab.$
8. Man vet att x=10 är en rot till ekvationen $x^2+px+2-5\sqrt{3}=0$. Bestäm den andra roten.
9. Faktorisera dessa polynom (dvs. presentera dem som en produkt av polynom av mindre grad):

a) x^3+x^2+x-3 b) x^4+x^2+1 c) x^4+1

Extra problem

10. Produkten av fyra på varandra följande heltal är 7!. Bestäm dessa tal. Hur många lösningar har problemet?
11. Visa att

a) två andragradspolynom som har tre gemensamma punkter är lika;

b) två polynom av grad $\leq n$ som har n+1 gemensamma punkter är lika.