

Polynom och nollställen

Definition. Ett **polynom** (i x) är ett uttryck som kan fås av reella tal och en variabel x genom addition, subtraktion och multiplikation (t.ex. $7x^4+3x^4$, $(1+2x)(3-0,5x)$, x^3-2x^2+3x-4). Om man adderar, subtraherar eller multiplicerar två polynom så får man fortfarande ett polynom. Ett polynom kan entydigt skrivas **på standardform**:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, där alla a_i är tal, $a_n \neq 0$. Termen a_nx^n kallas då

högstgradstermen och n kallas **polynomets grad**. Två polynom räknas som lika om de ger samma värde för viktet som helst värde på x , det vill säga att de är lika som funktioner. Ett **nollställe** är ett värde på x sådant att polynomets värde är lika med 0.

1. Kontrollera utan att utveckla att $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \neq (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$
2. Man multiplicerar två polynom, som är båda skilda från 0, med varandra. Kan det hända att samtliga termer tar ut varandra?
3. Polynom på båda led är lika med varandra: $(x^2-1)(x+\dots) = (x-1)(x+3)(x+\dots)$. En bråkstake har bytt ut två tal mot punkter. Återställ talen.
4. Låt $P(x)$ vara en produkt av två polynom: $P(x)=Q(x)R(x)$. Visa att vilken som helst av $P(x)$:s nollställen antingen är Q :s eller R :s nollställe.
5. Låt a vara ett nollställe till ett polynom $P(x)$. Visa att det då finns ett polynom $Q(x)$ sådant att $P(x)=(x-a)Q(x)$.
6. Visa att polynom av grad n kan ha högst n nollställen.
7. Visa att a och b är två nollställen till $x^2+px+q \Leftrightarrow p=-(a+b)$, $q=ab$.
8. Man vet att $x=10$ är en rot till ekvationen $x^2+px+2-5\sqrt{3}=0$. Bestäm den andra roten.
9. Faktorisera dessa polynom (dvs. presentera dem som en produkt av polynom av mindre grad):
 - a) x^3+x^2+x-3
 - b) x^4+x^2+1
 - c) x^4+1

Extra problem

10. Produkten av fyra på varandra följande heltal är $7!$. Bestäm dessa tal. Hur många lösningar har problemet?
11. Visa att
 - a) två andragradspolynom som har tre gemensamma punkter är lika;
 - b) två polynom av grad $\leq n$ som har $n+1$ gemensamma punkter är lika.