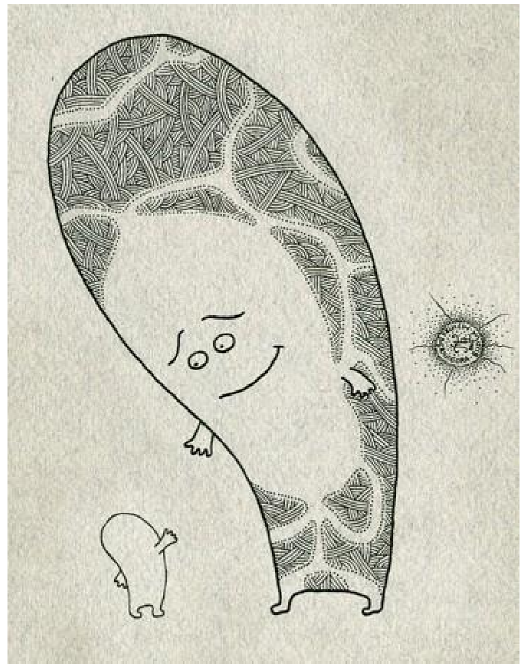
Mattecirkel *från mattebloggen.com*

Olikheter-1.



1. Visa att $x^2+y^2 \geq 2xy$ för alla tal x och y.
2. Visa att $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ för alla ickenegativa tal x och y.
3. Visa att $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$ för alla positiva tal x och y.
4. Visa att $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ för alla positiva tal x och y.
5. Vilket är större: $x+\frac{1}{x}$ eller 2, om $x>0$?
6. Produkten av vissa två positiva tal är större än deras summa. Visa att den summan är större än 4.
7. Visa olikheten $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.
8. För ickenegativa tal a, b och c visa att $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.
9. För ickenegativa tal a, b och c visa att $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$.
10. Visa att olikheten $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$ gäller för alla a, b och c.

Alltså gäller följande medelvärdesolikheter för två positiva tal:

$$\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}} \leq \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}$$

harmoniska $\leq$ geometriska $\leq$ aritmetiska $\leq$ kvadratiska

Extra problem

11. I en parallelltrapets har de parallella sidorna (baserna) a och b. Vilka längder är lika med något av medelvärden ovan?

a) Längden på sträckan som är parallell med baserna och går igenom diagonalernas skärningspunkt

b) Längden på mittpunktslinjen

c) Längden på sträckan, parallell med baserna, som delar trapetsen i två delar med lika stor area; längden på sträckan som delar trapetsen i två likformiga delar.

12. Visa att $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \geq xy+yz+zx$.