

**Mattecirkel** 18.06.2010  
**Olikheter-2.**

1. Alla termer i summan  $100 + 101 + 102 + \dots + 299 + 300$  ersätts med 200. Blir summan större eller mindre?
2. Alla termer i produkten  $100 \cdot 101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot 299 \cdot 300$  ersätts med 200. Blir produkten större eller mindre?
3. Jon-Erik hade två positiva tal  $a < b$ . Han lyckades "närma" dem varandra, det vill säga byta ut dem mot talen  $a_1 = a+x$  och  $b_1 = b-x$ , så att deras summa var densamma, men skillnaden till beloppet blev mindre. Hur förändrades värden på uttrycken nedan (blev de större eller mindre?):

$ab$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	$a^2 + b^2$	$a^4 + b^4$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$

4. Kan man, genom att "närma" talen varandra, från talen 10, 11, 12, 13, 14, 50, 100 få
  - a) en samling likadana tal?
  - b) talen 20, 20, 20, 20, 20, 20, 90?
  - c) talen 15, 16, 17, 18, 19, 20, 80?
  - d) vilket är större:  $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 50 \cdot 100$  eller  $30^7$ ?
5. Vilket är större:  $100!$  eller  $51^{50}$ ?
6. Kommer summan  $\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{299} + \frac{1}{300}$  bli större eller mindre om alla termer ersätts med  $\frac{1}{200}$ ?
7. Linnea gav Jon-Erik ett tredje tal. Hur ska han genom att "närma" talen få det största möjliga värdet på deras produkt?
8. Talen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  är positiva.
  - a) Visa att alla tal kan bli lika om de "närmas".
  - b) Visa att  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq S^n$ , där  $S$  är talens aritmetiska medelvärde.
  - c) Bevisa aritmetiska-geometrisk-olikheten:  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ .
9. Talen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  är positiva,  $S$  är deras aritmetiska medelvärde.
  - a) Visa att  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq nS^2$ .
  - b) Bevisa aritmetiska-kvadratisk olikheten:  $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ .
10. Summan av de positiva talen  $a, b, c, d$  är lika med 1. Visa att:
 
$$\sqrt{1+4a} + \sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4c} + \sqrt{1+4d} \leq 4\sqrt{2}.$$