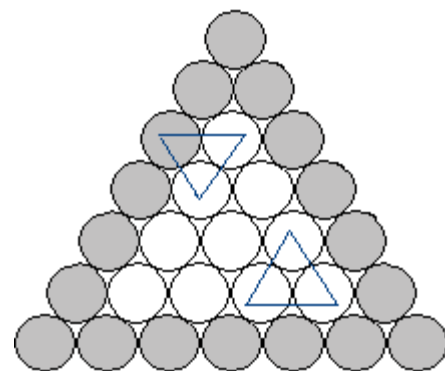


Problemlösningssuppgifterna för Kovalevsky dagarna 2010

(Magnus Carlson, Alexandre Chapovalov, Dag Jonsson)

Nivå 1. Kvaluppgifter

- I Bergsskogen bor endast älvor och dvärgar. Dvärgar ljuger när de pratar om sitt guld, annars så talar de sanning. Älvor ljuger när de pratar om dvärgar, annars talar de sanning. En gång pratade två bergskogsbor och då sa de följande:
A. Allt mitt guld har jag stulit av en drake.
B. Nu ljuger du!
Bestäm om A är en älva eller dvärg, och gör detsamma för B.
- Några barn åt godis. Varendra en åt 7 godisbitar färre än de övriga tillsammans, fast alla åt minst en godisbit. Bestäm hur många godisbitar barnen åt upp totalt.
- 28 runda mynt av samma storlek ligger på ett bord. De bildar en triangel (se bilden). Deras vikter kan däremot vara olika. Det är känt att vilka som helst tre mynt som tangerar varandra (de bildar en liten triangel, se 2 exempel på bilden) väger 10 g tillsammans. Bestäm hur mycket de 18 kantmynten (gråa på bilden) kan väga totalt.
- Det är känt att talen x och y är olika samt att $(x - 2008)(x - 2009) = (y - 2008)(y - 2009)$. Bestäm alla möjliga värden på summan $x + y$.
- Åsa har spelat bordtennis med sina fem kompisar en eftermiddag. När hon kommer hem berättar hon att Lasse har spelat fem matcher, Maria har spelat fyra, Niklas har spelat tre, Ylva har spelat två och Östen har spelat en match. Hur många matcher har Åsa spelat om man vet att ingen har spelat mer än en gång mot samma motståndare.



Nivå 2. Medelsvåra

- 33 plånböcker ligger i rad. Ursprungligen innehöll var och en 100 mynt. Sedan har man valt en plånbok och flyttat ett antal mynt från den, nämligen ett mynt till var och en av plånböckerna till höger från den utvalda. Du var inte närvarande när man gjorde detta. Ditt uppdrag är att bestämma vilken av plånböckerna var utvald. Till din hjälp får du peka på vilken uppsättning som helst av plånböcker och fråga hur många mynt de totalt innehåller. Bestäm det minsta möjliga antalet förfrågningar som behövs för att klara uppdraget.
- I en klass sitter eleverna parvis, varje par vid ett separat bord. Det är känt att 60% av pojkarna ingår i ett par med en pojke, medan endast 20% av flickorna ingår i ett par med en flicka. Bestäm andelen flickor i klassen.
- Tangenten till grafen $y = x^2$ skär koordinataxlarna i punkterna A och B . Det visade sig att $OA = OB$. Bestäm arean hos triangeln AOB .
- Visa att det bland 18 konsekutiva (dvs på varandra följande) tresiffriga tal finns minst ett som är delbart med sin siffersumma.
- Förenkla och beräkna uttrycket $\sqrt{7 + \sqrt{48}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}}$ utan att använda miniräknare, dvs räkna exakt.

Nivå 3. Svåra

1. Banorna i en park bildar två kvadrater med en gemensam sida. Holmes and Watson promenerar motsols runt varsin kvadrat med konstanta hastigheter (se bilden). Holmes promenerar 20% snabbare än Watson. Då och då möter de varandra på en gemensam sida. Det andra mötet inträffade 10 minuter efter det första, det tredje – 10 minuter efter det andra. Bestäm tiden som det går mellan det tredje och det fjärde mötet.
2. Lådans inre är formad som en kub med sidan 1 m. Man vill placera en platt hård kvadrat in i lådan. Kan kvadraten ha en sida längre än 1 m? Om ja, försök att placera så stor kvadrat som möjligt (ju större desto bättre)!
3. Kan man ändra endast en siffra i decimalutvecklingen av talet 28^{999} för att få ett primtal?
4. Kan man rita oändligt många (ofyllda) cirklar på planet så att varje punkt ligger på exakt 2010 cirklar? (Cirklar med radie 0 (d.v.s. enstaka punkter) är inte tillåtna).
5. En kortlek består av 100 kort med talen 1 till 100 skrivna på korten i ordning, så att på det översta kortet står det 1, det andra 2 och så vidare. Två spelare turas om att göra ett drag. Under ett drag väljer en spelare ett eller flera av de översta korten som motståndaren skall ta. Vinnaren är den som först får produkten av talen på sina kort delbart med 1000000. Bestäm spelets resultat (vinner spelare 1 (den som börjar), vinner spelare 2 eller det slutar oavgjort) om de båda spelar på det bästa sättet.

