Högstadiets matematiktävling 2010/11
Finaltävling 22 januari 2011
Lösningsförslag

1. **Lösningsförslag:**

   Vi ser att $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, så senast det hände för de tre på varandra följande primtalen 2, 3 och 5 var för $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ år sedan, 1980. Kan det ha hänt mellan 1980 och 2010?

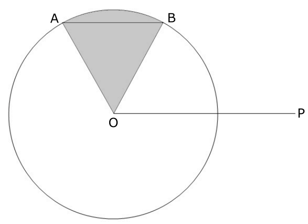
   Vi tittar på alla möjliga tre på varandra följande primtal:

   - $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, och $105 \cdot 19 = 1995$. Det är en förbättring mot 1980. Kan vi göra ännu bättre?
   - $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$, och eftersom $385 \cdot 5 = 1925$ och $385 \cdot 6 = 2310$, så ger det ingen förbättring.
   - $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$, och $1001 \cdot 2 = 2002$, och det är ytterligare en förbättring. Kan vi göra ännu bättre?
   - $11 \cdot 13 \cdot 17 = 2431$, vilket är större än 2010. Det är följdaktligen också alla resterande produkter av tre på varandra följande primtal.

   Svar: Senast ett årtal var delbart med tre på varandra följande primtal var 2002.

2. **Lösningsförslag:**

   Om vi flyttar den skuggade areans spets S från punkten P längs linjen OP så bibehålls arean av triangeln ASB eftersom basen AB och höjden mot AB förblir desamma. Låt oss nu därför flytta den skuggade areans spets till O som i figuren.

   Figur 1:

   Det betyder att den sökta arean är exakt cirkelsektorn AOB. Men, eftersom $|AB| = |AO| = |BO| = r$ så är triangeln AOB liksidig, vilket ger att vinkeln vid O är $60°$. Alltså är cirkelsektorns area exakt en sjättedel av hela cirkelns area, det vill säga $\frac{\pi r^2}{6}$.

   Svar: $\frac{\pi r^2}{6}$

3. **Lösningsförslag:**

   Låt det minsta talet vara a. Eftersom det näst minsta talet delas av a kan vi kalla det ab. Det tredje minsta talet delas av ab och vi kan kalla det talet abc. På liknande sätt blir det fjärde talet $abcd$ och det femte talet $abcde$.

   Eftersom a delar alla de fem talen delar det även dess summa. Men, summan är ett primtal, vilket betyder att de enda heltal som delar det är 1 och primtalet själv. Eftersom a är mindre än summan, är 1 det enda alternativet.

4. **Lösningsförslag:**

   Eftersom siffrorna i var och en av tärningarna är placerade så att två likadana siffror står mitt emot varandra kommer siffrorna 3, 4 och 5 finnas runt varje hörn i tärningen.

   Den stora kuben har åtta hörn, och runt vart och ett av dem finns alltså siffrorna 3, 4 och 5. Det betyder att summan av alla kubens sidor kommer att vara

   $$8 \cdot (3 + 4 + 5) = 8 \cdot 12 = 96$$

   Om kubens sidor bildar sex på varandra följande tal kan dessa kallas a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$ och $a+5$. Deras summa skulle då bli

   $$a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) = 6a + 15$$

   Men, $6a + 15$ är ett udda tal medan 96 är jämnt. Alltså kan kubens sidor omöjligen ha sex på varandra följande heltal som värden.

5. **Lösningsförslag 1:**

   Låt oss betrakta trianglarna ABP och CDP. Låt oss beteckna $|AB| = |CD| = x$ och höjderna som i figuren nedan.

   Vi kan då uttrycka areorna som $ABP = \frac{x \cdot h_1}{2}$ och $CDP = \frac{x \cdot h_2}{2}$. Summan av de två areorna blir då:

   $$\frac{x \cdot h_1}{2} + \frac{x \cdot h_2}{2} = \frac{x(h_1 + h_2)}{2}$$

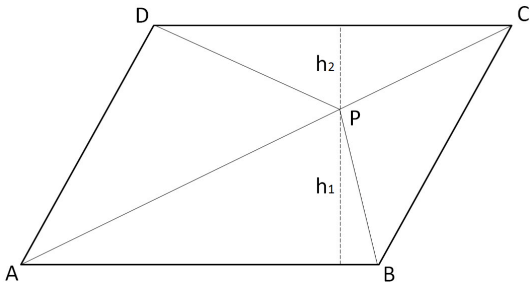
   Eftersom h_1 och h_2 är parallella och utgående från samma punkt bildar $h_1 + h_2$ hela parallellogrammens höjd, h. Det betyder att

   $$\frac{x(h_1 + h_2)}{2} = \frac{xh}{2}$$

   Det senare uttrycket är inget annat än halva parallellogrammens area, dvs $\frac{12}{2} = 6$. Eftersom ABP utgör en tredjedel av parallellogrammens area, $\frac{12}{3} = 4$, så måste CDP vara $6 - 4 = 2$.

   Svar: Arean av CDP är 2.

   Lösningsförslag 2:



Figur 2: Problem 5

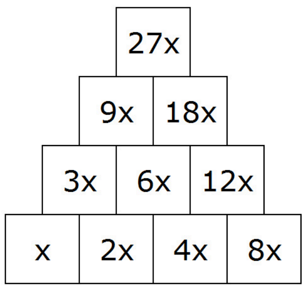
Eftersom AC är en diagonal utgör ABC halva parallellogrammens area, $\frac{12}{2} = 6$. Eftersom arean av ABP är en tredjedel av hela arean blir denna $\frac{12}{3} = 4$. Alltså är arean av triangeln $BCP = 6 - 4 = 2$.

Nu inser vi av symmetriskäl att trianglarna CDP och CBP har lika hög höjd mot den gemensamma basen CP. De måste därför ha lika stor area.

Svar: Arean av CDP är 2.

6. **Lösningsförslag:**

Låt det sökta talet vara x. Fyller vi då i rutorna enligt reglerna erhåller vi uppställningen nedan.



Figur 3: Problem 6

Summan av alla dessa tal är

$$x + 2x + 4x + 8x + 3x + 6x + 12x + 9x + 18x + 27x = 90x$$

Primtalsfaktoriserar vi 90 får vi $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. De faktorer som återstår för att göra $90x = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5x$ till ett kvadrattal är alltså 2 och 5. Därmed är $x = 2 \cdot 5 = 10$ det minsta tal som ger att summan är ett kvadrattal.

Svar: Det minsta tal som kan stå i den understa radens vänstra ruta är 10.