

HÖGSTADIETS MATEMATIKTÄVLING 2011/12

FINALTÄVLING 21 JANUARI 2012

Skrivtid: $9^{00} - 12^{00}$

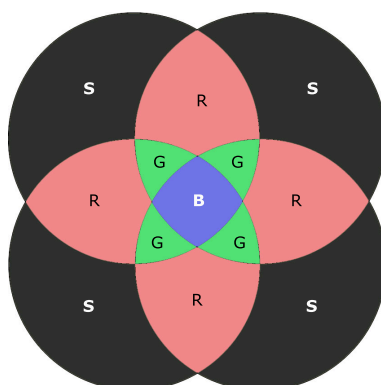
Motivera alla lösningar väl. Lämna in allt du kommer fram till, även dellösningar.

OBS! Lös varje uppgift på ett separat blad! Skriv läsligt!

Varje lösning ger 0 – 7 poäng.

Lycka till!

1. Agaton har ett rektangulärt pappersark som han, utan att vika det, klipper itu med ett rakt snitt. Därefter tar han en av delarna och klipper itu den på samma sätt. Slutligen räknar Agaton hur många sidor hans pappersbitar nu har tillsammans. Vilka olika summor kan han komma fram till?
2. Figuren nedan visar ett mönster som är konstruerat av fyra överlappande cirklar, alla med arean 1 dm^2 . Figuren målas med fyra olika färger. Den svarta färgen (S) är billigast och kostar 31.40 kr/dm^2 . Den röda färgen (R) är dubbelt så dyr som den svarta. Den gröna färgen (G) är tre gånger så dyr som den svarta. Den blå färgen (B) är fyra gånger så dyr som den svarta. Vad kostar det att måla hela figuren?



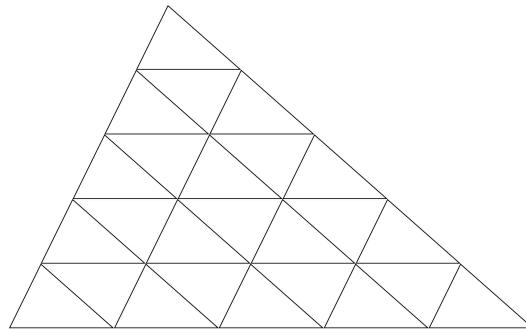
Figur 1: Problem 2

3. Avgör om följande uttryck är större än eller mindre än 1.

$$\frac{1}{\frac{2}{\frac{3}{\frac{4}{\vdots}}}} = \frac{2011}{2012}$$

Var god vänd!

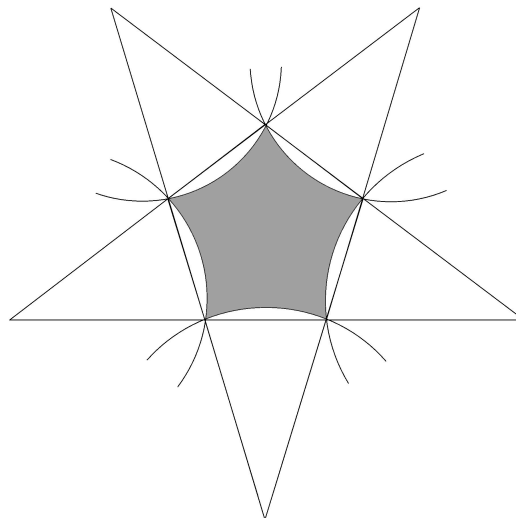
4. Lucifer har en loppcircus. Lopporna sitter i en triangelformad manege som består av 25 mindre trianglar, precis som i bilden nedan. I början sitter det en loppa i varje liten triangel.



Figur 2: Problem 4

När Lucifer ringer i en liten klocka så hoppar alla loppor till en angränsande triangel (två trianglar är angränsande om de har en gemensam sida). Det får sitta flera loppor i samma triangel efter att de har hoppat. Visa att det måste finnas minst fem tomma trianglar efter det att Lucifer ringt i klockan fem gånger.

5. Stella konstruerar en stjärna genom att förlänga sidorna i en regelbunden femhörning. Stjärnans tio sidor blir alla 1 m långa. Sedan ritar hon fem cirklar, med centrum i var och en av stjärnans uddar, och så stora att de går igenom stjärnans närmsta inre hörn. Cirklarna avgränsar den skuggade figuren i mitten av stjärnan. Beräkna den skuggade figurens omkrets!



Figur 3: Problem 5

6. Summan av tre positiva heltal är 11. Summan av talens kuber är 251. Bestäm samtliga taltripplar som uppfyller villkoren.