

## Tips för tävlingsmatematik

Vi kommer att tillsammans diskutera och viss mån bevisa dessa tips som ofta kommer till användning när man löser tävlingsproblem.

### Siffror och delbarhet

- För att bestämma sista siffran hos talet  $a + b$  räcker det att kolla på sista siffran av talet som är lika med summan av de sista siffrorna hos summationstermerna. Detsamma gäller produkten.

**Kontrollfråga:** Vilken siffra slutar  $5476623447 \cdot 432569$  på?

- Varje positivt heltal går att faktorisera i primtal på exakt ett sätt upp till faktorernas ordning.

**Kontrollfråga:** Vilka delare har talet 2012?

- Ett tal är delbart med 3 om och endast om talets siffersumma är delbar med 3. Samma princip gäller för 9.

**Kontrollfråga:** Är 11011011011 delbart med 3?

- Ett tal är delbart med 11 om och endast om talets teckenväxlande siffersumma (det vill säga varannan siffra adderas, varannan subtraheras) är delbar med 11.

**Kontrollfråga:** Är 2990992 delbart med 11?

### Ekvationer

- Om problemet är en ekvation, försök inte bara att lösa på det traditionella sättet (substitutionsmetoden till exempel). Hitta på och inför egna variabler.

**Exempel:** Isället för att utveckla parenteserna i ekvationen

$$(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 1) - 9 = 0$$

och lösa en fjärdegradare, beteckna

$$y = x^2 - 3x + 1$$

och lös ekvationen

$$y^2 - 9 = 0$$

först. (Obs! Se upp för falska rötter!)

- Om två eller flera variabler är symmetriska med varandra, bestäm storleksordningen på dem i förväg.

**Exempel:** Om du skall hitta alla tripplar av olika positiva heltal  $a, b, c$  så att  $a + b + c = 10$ , så kan du anta att  $a < b < c$ .

## Olikheter

- Olikheten  $x^2 \geq 0$  gäller för alla reella tal  $x$  (och  $x^2 = 0$  endast om  $x = 0$ ).
- $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  för alla positiva reella tal  $a$  och  $b$ . De två uttrycken är lika endast om  $a = b$ .

**Kontrollfråga:** Hur visar man att  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  för alla positiva reella tal  $a$ ?

## Problem

Försök att lösa följande problem och glöm inte att du kan använda dig av tipsen ovan.

1. Visa att

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq a + b - ab$$

för alla positiva reella tal  $a$  och  $b$ . När gäller likhet?

2. På dagen för en släkträff sommaren 2010 fyller Lennart, Lotten och Lisa år. Lennart har räknat ut att produkten av deras åldrar är 6958. En gång tidigare under 2000-talet har släktingarna sammanstrålat samma datum. Då var summan av Lennarts, Lottens och Lisas åldrar lika med 80, men vad var produkten den gången?

3. Finn alla reella lösningar till ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ xyz = 60 \end{cases}$$

4. Summan av två tal är lika med 201. Visa att deras produkt inte kan vara delbart med 201.