Funktionalekvationer

En funktion är en regel som tilldelar svar till olika möjliga tal. Till exempel om vi har en funktion:

$$f(x) = x - 5$$

så ger funktionen svaret 1 ifall vi ger den talet 6:

$$f(6) = 1$$

och svaret -2 ifall vi ger det talet 3

$$f(3) = -2$$

och så vidare. Man bestämmer själv vilka typ av tal funktionen kan få in: kanske är det bara heltal eller så är det rationella eller möjligen alla reella tal eller någon speciell delmängd av reella tal.
Funktioner kan tilldela samma svar till två olika tal, som till exempel $f(x) = x^2$, men det kan aldrig ge två svar till ett och samma tal.

Problem

1. Om funktionen $f(x)$ vet man följande: Om $x < y$, så är $f(x) > f(y)$. Låt $a < b$. Vilket är större:
   (a) $f(f(a))$ eller $f(f(b))$?
   (b) $f(f(f(f(f(a)))))$ eller $f(f(f(f(f(b)))))$?

2. Funktionen $g(x)$ har egenskapen att för alla x och y gäller likheten:

$$g(x + y) = g(x) + g(y)$$

   Man vet också att $g(5) = 1$. Bestäm:
   (a) $g(100)$
   (b) $g(1)$
   (c) $g(1/2)$
   (d) $g(2/3)$

3. Funktionen $f(x)$ uppfyller

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

för alla positiva x och y. Bestäm $f(2012)$ om $f(\frac{1}{2012}) = 1$.

4. En funktion $h(x)$ uppfyller följande likhet för alla reella tal x och y:

$$h(x + y) = h(x) + h(y) + 80xy$$

Du har fått reda på att $h(1/4) = 2$. Ta även reda på:

(a) $h(1/2)$
(b) $h(1)$
(c) $h(2/3)$

5. Finn alla funktioner $f(x)$ sådana att för alla reella tal x och y följande likhet är uppfylld:

$$f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$$

6. Funktionen $g(x)$ för alla värden på x uppfyller:

$$g(x) + (x + \frac{1}{2}) \cdot g(1 - x) = 1$$

(a) Bestäm $g(0)$ och $g(1)$.
(b) Bestäm $g(13)$.