

## Startproblemet

En hörnruta klipps bort av en rutig kvadrat av storlek  $128 \times 128$ . Visa att resten av kvadraten kan delas upp i trerutiga vinkelhakar.

## Problem

1. Visa att en kvadrat kan delas upp i  $n$  mindre kvadrater för alla  $n \geq 6$ .
2. Några räta linjer och cirklar är ritade på ett plan. De delar planet i ett antal delar. Visa att man kan måla delarna i två färger på så sätt att vilka som helst två delar som har en gemensam gräns är målade olika.
3. Visa att alla heltal som är större än eller lika med 14 kan skrivas som en summa av treor och åttor.
4. Talet  $x + \frac{1}{x}$  är ett heltal. Visa att talen  $x^2 + \frac{1}{x^2}, x^4 + \frac{1}{x^4}, x^8 + \frac{1}{x^8}, \dots$  osv också är heltal.
5. Visa att för alla  $n \geq 3$  går det att hitta  $n$  olika positiva heltal så att deras summa är delbar med vart och ett utav de heltalen.
6. Vi betraktar alla bråk med täljaren 1 och nämnaren som är ett positivt heltal, det vill säga talen  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ . Visa att man kan uttrycka 1 som en summa av  $n$  stycken sådana olika bråk, för  $n \geq 3$ . T.ex. för  $n = 3$  kan vi ta:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

## Extrauppgift

På gränsen till en öken står en bil och bredvid finns en bensinstation med godtyckligt mycket bensin. Bilen har också tillgång till godtyckligt många bensintankar, som man kan fylla upp med bensinen från bilen och lämna ute i öknen var man vill (för att kunna använda det sedan). Om bilen är fullt tankad, klarar den att åka 50 km. Visa att bilen kan komma fram hur långt som helst ut i öknen.