Det här är ett udrag ur boken "Matematisk utflykt" skriven av Erik Svensson och Valentina Chapovalova. "Slantar och sannolikheter" är ett av problemen på nivå 1.

Slantar och sannolikheter

Två vänner singlar slant: Den första singlar 10 gånger och den andra singlar 11 gånger. Hur stor är sannolikheten att den andra vännen får klave fler gånger än den första vännen?

Ledtråd

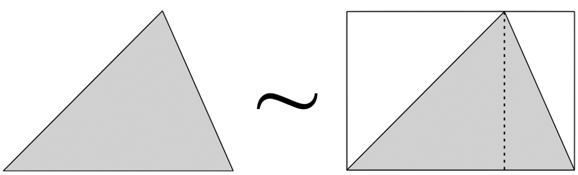
Vad är sannolikheten att den andra vännen *inte* får klave fler gånger? Det är ju ett mycket liknande problem, men det kan ändå vara relevant att tänka på.

Lösning

Lösning: Den andra vännen singlar en slant mer, och det betyder att han antingen kommer få fler krona eller fler klave än den första vännen. Sannolikheterna för dessa två fall är uppenbart lika stora, och tillsammans täcker de alla möjliga utfall. Därmed måste sannolikheten för vardera vara en halv.

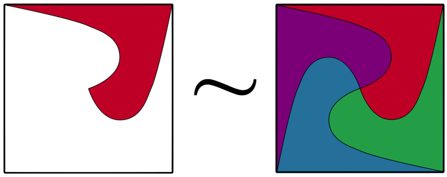
Diskussion: Att lösa problemet annorlunda, med några falluppdelningar och ett par enkla beräkningar, vore i det här fallet kanske inte så svårt, så värdet i vår lösning ligger framförallt i dess elegans, att vi hittar en symmetri och utnyttjar den. Vi behöver aldrig räkna någonting, utan noterar bara att det vi söker är en av två lika stora saker som tillsammans blir en hel, och drar den mycket enkla slutsatsen att det är en halv.

I många andra problem är det här tankesättet inte bara elegantare, utan också avsevärt enklare. Ett enkelt exempel är hur vi beräknar arean på en (inte rätvinklig) triangel. Vid första anblick är det inte uppenbart hur vi finner arean, men några hjälplinjer avslöjar en symmetri. Vi ser att triangeln består av två rätvinkliga trianglar, som utgör hälften av var sin del av en rektangel, och tillsammans utgör de alltså halva rektangeln:



Figur 1: Triangeln utgör halva rektangelns area.

På samma sätt blir den röda figuren i bilden nedan avsevärt enklare att beräkna arean på om man hittar rätt symmetri:



Figur 2: Den röda figuren utgör en fjärdedel av kvadratens area.

Men det är inte bara i geometriska sammanhang som symmetrier kommer till användning. En klassisk anekdot handlar om hur matematikern Gauss som barn hade en lärare som bestämde sig för att ge sin klass en svår uppgift, nämligen att summera alla positiva heltal upp till 100. Det sägs att Gauss förvånade sin lärare med att finna svaret mycket snabbt, inte genom att addera en massa tal, utan genom att observera att det finns en symmetri. Han insåg att för varje tal mindre än medeltalet finns ett tal som är lika mycket större än medeltalet, så han delade upp talen i par: (1, 100), (2, 99), (3, 98) och så vidare, ända fram till (50, 51). Det finns 50 sådana talpar, och varje har summan 101, så summan av alltihop är helt enkelt $50 \cdot 101 = 5050$.