Matematikcirkel Katedralskolan • 11 december 2013

Catalantal

Start

Hur många sätt finns det att skriva ner 2 parentespar, så att parentessättningen är korrekt? 3 parentespar? 4 parentespar? Vad innebär det att parentessättningen är korrekt (definiera)?

Problem

Idag finns det inte n problem, utan n kombinatoriska konstruktioner. Visa att talen i konstruktionerna är lika genom att konstruera bijektionen mellan mängderna. (Hur många uppgifter måste ni således lösa för att räknas vara helt klara?)

1. Antalet korrekta parentesstrukturer bestående av $2n$ parenteser.

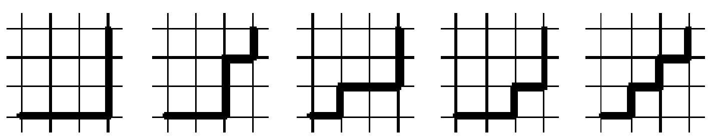
$$((()))\qquad (())()\qquad ()(())\qquad (()())\qquad ()()()$$

   Ett sådanant tal kallas för *Catalantal nummer n.*

2. Antalet talföljder $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, sådana att "1" och "-1" förekommer n gånger var, och olikheten $a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq 0$ är uppfylld för alla $k \in \{1, \ldots, 2n\}$.

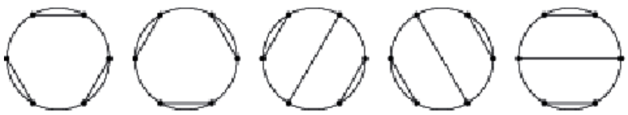
$$+1+1+1-1-1-1 \qquad +1+1-1-1+1-1 \qquad +1-1+1+1-1-1$$
$$+1+1-1+1-1-1 \qquad +1-1+1-1+1-1$$

3. Antalet vägar från punkten $(0,0)$ till punkten (n,n) längs med rutnätet, där stegen bara kan gå upp och åt höger, som inte går över linjen $y = x$.



4. Antalet sätt att dela upp $2n$ punkter på en sträcka i par, så att om varje par kopplas med en halvcirkel som ligger på ovansidan av sträckan, så korsar inte halvcirklarna varandra.

5. Antalet sätt att dela upp $2n$ punkter på en cirkel i par, så att om varje par förbinds med en sträcka, så korsar inte sträckorna varandra.



6. Antalet sätt att ställa $2n$ olika långa människor på två rader bakom varandra, så att människor i varje rad är ordnade från längst till kortast, och varje människa i den första raden är längre än människan bakom denne i andra raden.

7. Antalet sätt att sätta ut parenteser i ett aritmetisk uttryck med n variabler

   (ab)(cd) a(b(cd)) a((bc)d) ((ab)c)d (a(bc))d

8. Antalet binära träd med $n + 1$ hörn med grad 1.

   Ett träd kallas *binärt* om det har ett markerat hörn (roten) med grad 2 och alla andra hörn har grad 1 eller 3. Således, från alla hörn som inte har grad 1 går det vidare exakt två kanter till nästa nivå. Träd som skulle vara likadana om man på ett av dem bytte plats på två grenar, som går ner från ett visst hörn, räknas som olika.

9. Antalet sätt att dela upp en konvex $(n+2)$-hörning i trianglar genom att dra diagonaler som inte korsar varandra.

10. Antalet rotträd (träd med ett marketat hörn), som innehåller exakt $n + 1$ hörn.