

Matematikcirkel Katedralskolan • 23 oktober 2013
Cykler

Start

Skickliga Simon fyllde i rutorna i tabellen nedan på så sätt att summan av siffrorna i tre på varandra följande rutor var lika med 15. Luriga Lisa suddade bort nästan alla siffror från tabellen.

6								4						
---	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--

Går det att återställa siffrorna i tabellen?

Problem

1. Bestäm resten när 3^{100} divideras med 7.
2. Visa att följderna av rester som fås när man dividerar sjupotenser med 2013 är periodiska och periodlängden är inte större än 2013.
3. Bestäm den hundra siffran efter kommatecknet i talet $\frac{28}{270}$.
4. Varje nästkommande tal i en heltalsföljd fås genom det föregående på följande sätt: talet upphöjs i 2 och sedan stryks alla dess siffror utom de sista fyra. Visa att talföljden är periodisk och att periodlängden är inte större än 10000.

Den enkla cykelprincipen. Om ett system kan befinna sig i ett ändligt antal tillstånd, och varje tillstånd fås entydigt från det föregående, så kommer systemet att förr eller senare gå in i en cykel.

5. I Världens Viktigaste Land är invånarna väldigt stolta över att de får välja president var fjärde år: varje gång det blir antingen en republikan eller en demokrat. VVL-sociologerna upptäckte att det fanns en fast lag, som bestämde vilket parti den kommande presidenten tillhör. Denna lag är superhemlig, men genom en läcka fick man veta att partitillhörigheten på varje president bestäms helt av partitillhörigheterna hos de föregående tio.

Visa att följderna av presidenternas partitillhörigheter kommer att bli cykliska och uppskatta längden på perioden.

Den sammansatta cykelprincipen. Om ett system kan befinna sig i ett ändligt antal tillstånd, och varje tillstånd fås entydigt från ett fixt antal föregående, så kommer systemet att förr eller senare gå in i en cykel.

6. I ett Kungadöme utgår det tre vägar från varje slott och i varje korsning. En riddare, som gillar variation, började rida ifrån sitt slott och turas om att svänga vänster och svänga höger. Visa att hans rutt så småningom blir cyklisk.
7. Varje nästa element i en talföljd är lika med den sista siffran av produkten av de föregående två talen. Visa att följderna
 - (a) är periodisk.
 - (b) har en period som inte är större än 26.
 - (c) har en period som är mindre än 17.

Extra problem

8. Redan en miljard år bestäms vädret på planeten Minecraft helt av det föregående årstiondet. Man vet att det finns nio typer av väder (magnetstorm, meteoritregn, frost osv.). Alla dagar den senaste veckan var vädret olika. Visa att det någon gång kommer en vecka med exakt samma uppsättning av dessa olika väder.
9. En Rubiks kub blev tilltrasslad genom att man utförde en kombination av vridningar på starttillståndet. Visa att man kan få kuben till att vara i starttillståndet igen genom att utföra samma kombination några gånger till.

