

Matematikcirkel Katedralskolan • 4 december 2013  
**Gott och Blandat**

### Liten tävling

Uttryck talet 2013 genom att bara använda fyror. Försök att använda så få fyror som möjligt. Tillåtna operationer är de fyra räknesättningar, samt potenser. Parenteser får användas godtyckligt många gånger.

### Problem

Lös uppgifterna i varfri ordning, själv eller med någon annan! Välj den som du/ni tycker är roligast först.

1. Jag tänker på 3 positiva heltal, alla är mindre än 100. Du får också välja tre tal (hur stora som helst) och begära mig att multiplicera mitt första med ditt första, mitt andra med ditt andra, mitt tredje med ditt tredje, och sedan uppge summan av de tre produkterna. Bestäm den minsta möjliga antalet sådana frågor för att säkert finna de tre tänkta talen.
2. Hitta så många lösningar som möjligt till ekvationssystemet och försök att visa varför inga andra lösningar finns:
$$\begin{cases} x^2 - yz = x \\ y^2 - zx = y \\ z^2 - xy = z \end{cases}$$
3. Det finns 17 kort. En åskådare tänker på ett av dem. Trollkarlen delar upp korten i 4 högar och frågar åskådaren i vilken hög kortet ligger. Vilket är det minsta antalet frågor trollkarlen behöver för att alltid kunna bestämma åskådarens kort?
4. En Rubiks kub blev tilltrasslad genom att man utförde en kombination av vridningar på starttillståndet. Visa att man kan få kuben till att vara i starttillståndet igen genom att utföra samma kombination några gånger till.
5.  $ABCD$  är en konvex fyrhörning, dessutom gäller  $AB + BD < AC + CD$ . Visa att  $AB < AC$ .

6. Varje nästa element i en talföljd är lika med den sista siffran av produkten av de föregående två talen. Visa att följden

(a) är periodisk.

(b) har en period som inte är större än 26.

(c) har en period som är mindre än 17.

7. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ xyz = 60 \end{cases}$$

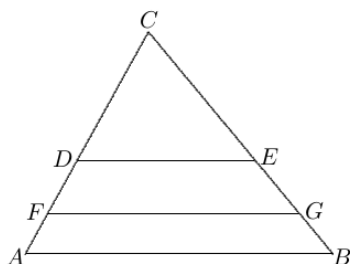
8. Niklas har en bit metalltråd som är 48 cm lång. Av den vill han bygga ramen till en rombkuboktaeder med sidan 1 cm (se bild). Som minst, i hur många bitar måste Niklas klippa upp tråden för att bygga modellen?



9. Redan en miljard år bestäms vädret på planeten Minecraft helt av det föregående årstiondet. Man vet att det finns nio typer av väder (magnetstorm, meteoritregn, frost osv.). Alla dagar den senaste veckan var vädret olika. Visa att det någon gång kommer en vecka med exakt samma uppsättning av dessa olika väder.

10. Konungen Friedrich hade 5 söner. Bland hans ättlingar hade 100 stycken exakt 3 söner, medan alla andra dog utan att få några barn. Hur många ättlingar hade konungen Friedrich?

11. Linjerna  $DE$  och  $FG$  är båda parallella med linjen  $AB$ . De tre områdena  $CDE$ ,  $DFGE$  och  $FABG$  har lika stora areor.



Bestäm förhållandet  $\frac{CD}{FA}$ .

12. Det finns 27 mynt: 9 enkronor, 9 två kronor och 9 trekronor. Bland dem finns ett falskt mynt som väger mindre än de motsvarande riktiga. En riktig enkrona väger 1g, tvåkrona 2g och trekrona 3g. Med hjälp av en balansvåg utan hjälpvikter bestäm det falska myntet på
- (a) på 4 vägningar.
  - (b) på 3 vägningar.
13. De tre räta linjerna  $l, m, n$  är parallella. Avståndet mellan  $l$  och  $m$  är 4, avståndet mellan  $m$  och  $n$  är 3 och  $m$  ligger mellan  $l$  och  $n$ . En kvadrat, som ligger i området mellan  $l$  och  $n$ , har tre av sina hörn på var sin linje. Finn kvadratens sidlängd.
14. I ett land finns 15 städer och vissa av städerna är förbundna med flyglinjer. Tre flygbolag äger flyglinjerna i landet och man vet att även om ett av bolagen skulle lägga ner så skulle det ändå gå att ta sig från vilken stad som helst till alla andra (möjligheten med byten). Vilket är det minsta antalet flyglinjer som landet kan ha?
15. Omkretsen för en femhörning stjärna, vars hörnpunkter bildar en konvex femhörning  $F$ , omkretsen för  $F$ , samt omkretsen för stjärnans inre femhörning är alla primtal. Visa att summan av dessa tre tal är inte mindre än 20.