Matematikcirkel Katedralskolan • 4 september 2013

Likformiga trianglar

Definition. Två trianglar kallas *likformiga* om deras motsvarande vinklar är lika och deras motsvarande sidor är proportionella. Närmare bestämt,

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

om $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ och $\angle C = \angle C'$ och $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$. Förhållandet k kallas i så fall för *likformighetens koefficient*, och man säger att den första triangeln är likformig med den andra med koefficienten k.

Problem

1. Visa att kongruenta trianglar är likformiga med varandra. Bestäm koefficienten.

2. En mindre triangel har hörnen i mittpunkterna på sidorna av en större triangel. Visa att den mindre triangeln är likformig med den större triangeln. Bestäm koefficienten.

3. Låt triangel 1 vara likformig med triangel 2 med koefficienten k, samt triangel 2 likformig med triangel 3 med koefficienten m. Visa att triangel 1 är likformig med triangel 3. Bestäm koefficienten.

4. Man vet att $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, och att $AB = 9, AC = 12, A'C' = 6, B'C' = 5$. Bestäm likformighetens koefficient samt $A'B'$ och BC.

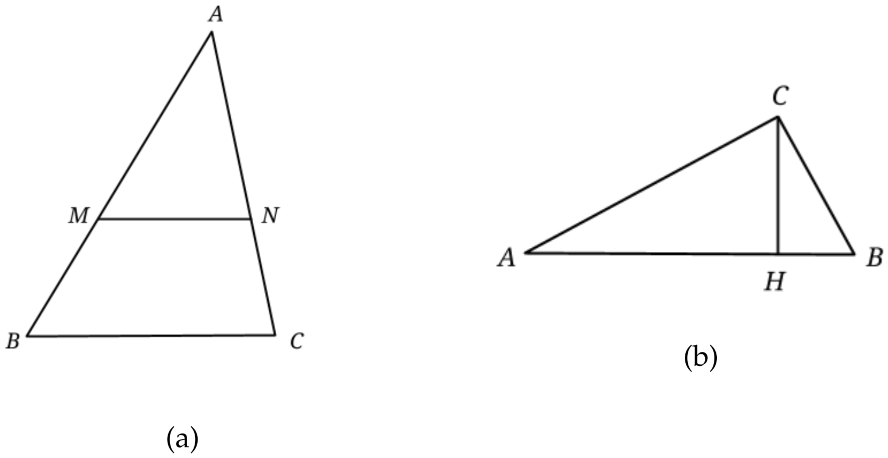
Lemma 1. En vinkel med spetsen O är given. På ett av vinkelbenen finns punkterna A och B markerade, på det andra finns punkterna C och D. Då gäller följande förhållanden för areor:

(a) $\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{OA}{OB}$ (b) $\frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle OBD}} = \frac{OC}{OD}$ (c) $\frac{S_{\triangle OAC}}{S_{\triangle OBD}} = \frac{OA \cdot OC}{OB \cdot OD}$

Lemma 2. Om två trianglar har en lika stor vinkel, och den vinkeln kantas av sidorna med längder a och c resp. b och d, så förhåller sig trianglarnas areor som $ac : bd$.

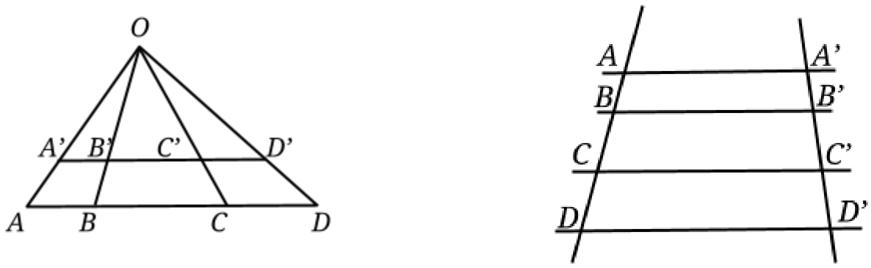
5. Visa att om två trianglar är likformiga med koefficienten k, så förhåller sig deras areor som $k^2 : 1$.

6. Om två vinklar i en triangel är lika med två vinklar i en annan triangel så är trianglarna likformiga med varandra.



Figur 1

7. (a) I figur 1a är sträckorna MN och BC parallella. Visa att $\triangle ABC \sim \triangle AMN$.
   (b) $AM = 6, MN = 4, BC = 6$. Bestäm MB.
8. (a) Visa att höjden CH (figur 1b) dragen mot hypotenusan i en rätvinklig triangel delar den stora triangeln i två mindre trianglar som är likformiga med den stora samt med varandra.
   (b) Givet $AC = 4, BC = 3$, bestäm AH, BH, CH.
9. Visa att $CH = \sqrt{AH \cdot BH}$ i figur 1b.
10. Visa att $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{CN}$ i figur 1a.
11. Två trianglar är likformiga med varandra med koefficienten k. Visa att deras respektive (a) höjder; (b) bisektriser; står i samma förhållande k mot varandra.



(a) (b)

Figur 2

12. På ett plan finns två räta linjer samt en grupp med räta linjer. Betrakta två fall:

    (a) Gruppen består av parallella linjer (figur 2a).

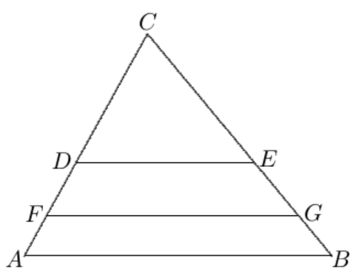
    (b) Paret består av parallella linjer medan gruppen av linjer går alla genom en och samma punkt (figur 2b).

    Visa att linjerna från gruppen skär ut proportionella sträckor från paret av linjer, dvs

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$

13. De tre räta linjerna l, m, n är parallella. Avståndet mellan l och m är 4, avståndet mellan m och n är 3 och m ligger mellan l och n. En kvadrat, som ligger i området mellan l och n, har tre av sina hörn på var sin linje. Finn kvadratens sidlängd.

14. Linjerna DE och FG är båda parallella med linjen AB. De tre områdena CDE, $DFGE$ och $FABG$ har lika stora areor.



Bestäm förhållandet $\frac{CD}{FA}$.