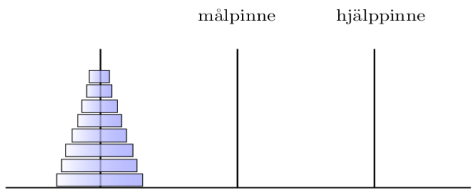
Matematikcirkel Katedralskolan • 29 januari 2014

Rekursion

Diskussionsproblem

Hanoi-tornen. I slutet av 1800-talet presenterade den franske matematikern Edouard Lucas ett slags matematiskt pussel som gick ut på att under iakttagande av vissa spelregler (se nedan) förflytta ett antal olika stora skivor, som låg travade på varandra över en pinne. Efter en lyckad genomförd förflyttning, skulle skivorna ligga travade över en annan pinne (målpinne) i samma ordning som från början, dvs. i storleksordning med den största skivan underst. En tredje pinne (hjälppinne) skulle finnas tillhands som mellanlandningspinne. Bestäm det minsta antalet enskilda skivförflyttningar som fordras för att på nämnda sätt flytta ett torn med n skivor.

Spelregler: Skivorna skall flyttas en i taget, från pinne till pinne. Och ingen skiva tillåts någonsin att hamna ovanpå en mindre skiva eller utanför de tre pinnarna.



Med *rekursion* menas att nya objekt i någon struktur uttrycks med hjälp av (en eller flera) föregående.

Övningar

Talföljderna är uttrycka med en så kallad *sluten formel*. Hur kan man uttrycka respektive talföljd rekursivt?

(a) $a_n = 2^n$

(b) $a_n = n!$

(c) $a_n = n^2$

Problem

1. Talföljderna nedan är definierade rekursivt. Bestäm en sluten formel för a_n i varje fall. Visa att formeln stämmer för alla a_n.

   (a) $a_0 = 5, a_{n+1} = a_n + 7$.

   (b) $a_0 = 0, a_{n+1} = 2a_n + 1$.

   (c) $a_0 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1$.

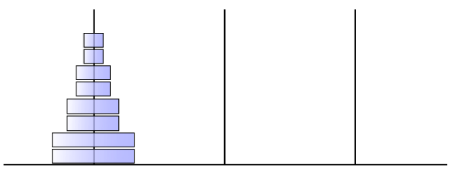
   (d) $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$.

   (e) $a_0 = 0, a_{n+1} = 4a_n + 1$.

   (f) $a_0 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2$.

2. Antag att c och d är reella tal med $c \neq 1$ och att a_0 är ett heltal, som är det första talet i en talföljd. Följden beskrivs rekursivt med sambandet $a_{n+1} = c \cdot a_n + d$. Bestäm en sluten formel för talföljden och bevisa att den är korrekt.

3. I följande variant på pusslet med Hanoi-tornen förekommer par av identiska skivor.



   F.ö. gäller samma regler som i diskussionsuppgiften. Bestäm både en rekursiv och en sluten formel för det minsta antalet enskilda skivförflyttningar som fordras för att flytta ett torn med n stycken skivpar från en pinne till en annan, om

   (a) de två identiska skivorna av varje storlek tillåts hamna i omvänd ordning i den slutgiltiga placeringen i förhållande till den ursprungliga,

   (b) två identiska skivor *aldrig* tillåts hamna i omvänd ordning i den slutgiltiga placeringen.

4. Bestäm antalet sätt att dela upp en $2 \times n$-rektangel i dominobrickor (det vill säga 2×1-brickor).

5. Bestäm en sluten formel för maximala antalet delar som kan fås av en rund tårta om man gör n raka snitt ovanifrån genom tårtan.