Matematikcirkel Katedralskolan • 13 november 2013

Triangelolikheter

Diskussionsuppgift

På ett bord ligger 100 pinnar. Kan man alltid vara säker på att det går att välja tre av dem som man kan bygga en triangel av?

Olikhet nr 1. För att alla punkter A, B, C i planet gäller $AB + BC \geq AC$, och likhet uppnås då och endast då punkten B ligger på sträckan AC.

Olikhet nr 2. I en triangel ligger större vinkel mot större sida. Det innebär att om i en triangel ABC gäller $AB > AC$ så är $\angle C > \angle B$ och vice versa.

Problem

1. Visa att om $b + c > a, a + c > b, a + b > c$, där a, b och c är positiva tal, så existerar en triangel med sidorna a, b och c.
2. Visa att medianen AM i triangeln ABC är längre än $\frac{AB+AC-BC}{2}$.
3. Visa att från sträckor med längderna a, b och c går att bygga en triangel om och endast om det finns positiva x, y och z sådana att $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x + z$.
4. Visa på ett nytt sätt att om $AB = AC$, så är vinklarna ABC och ACB lika.
5. I en triangel ABC är längden av medianen AM mer än hälften av längden BC. Visa att vinkeln BAC är spetsig.
6. $ABCD$ är en konvex fyrhörning, dessutom gäller $AB + BD < AC + CD$. Visa att $AB < AC$.
7. Mittpunkterna på tre cirklar, som inte skär varandra, ligger på en linje. Visa att om en fjärde cirkel tangerar alla de tre andra, så är dess radie större än radien hos en av cirklarna.

Extra problem

8. Omkretsen för en femhörnig stjärna, vars hörnpunkter bildar en konvex femhörning F, omkretsen för F, samt omkretsen för stjärnans inre femhörning är alla primtal. Visa att summan av dessa tre tal är inte mindre än 20.