Eulerstigar

Diskussionsproblem

På Skänkvägen står elva hus på rad, numrerade från 1 till 11. Eftersom sämjan bland grannarna är god, så bjuds det ofta på middag. När man bjuder på middag bjuder man in de två närmaste grannhusen på båda sidor. Om man inte har två grannar på någon sida bjuder man alltså in färre grannar, till exempel bjuder hus 2 in grannarna i hus 1, 3 och 4.

En dag ärver familjen i hus 2 en riktigt, riktigt ful tavla. När familjen nästa gång blir bjuden på middag bestämmer man sig därför att ge bort tavlan till kvällens värd. Men tavlan är så ful att ingen på gatan vill behålla den, så vid första möjlighet ger man därför bort den till den middagens värd. Av artighetsskäl kan man såklart inte ge tillbaka tavlan till någon man själv fått den av, och inte heller till någon man själv redan en gång givit bort den till.

Vem kommer till slut att vara tvungen att behålla tavlan?

Problem

1. I en fotbollsturnering deltar 20 lag. Efter att alla lag hade spelat två spel, bestämde man att de skulle delas upp i tre divisioner, så att inga två lag i samma division hade redan mött varandra. Går detta garanterat att genomföra?

2. På n st. kort står tal från 1 till n, både på fram- och baksidan, så att varje tal står på två ställen. Visa att korten kan läggas på så sätt att varje tal syns exakt en gång.

3. En *Eulerstig* är en väg genom en graf som går igenom varje kant exakt en gång. En *Eulercykel* är en cykel i grafen, som går igenom varje kant exakt en gång.

   Visa att:

   (a) Om en sammanhängande graf inte har mer än två noder med udda grad, så innehåller grafen en eulerstig.

   (b) Om en sammanhängande graf bara har noder med jämn graf, så innehåller grafen en eulercykel.

4. Planeten ”Cube” är formad som en kub. Dess städer är belägna på kubens hörn samt i sidornas mittpunkter. Varje par av städer som ligger på samma kant är förbundna med en väg. Alla städer som ligger i mitten av en sida är förbundna med de närmaste hörnen. En astronaut vill ta en promenad på planeten genom att gå på varje väg exakt en gång. Kan hen möjligen göra det?

5. På ett plan har någon ritat flera cirklar, som bildar en sammanhängande figur. Visa att man kan rita figuren utan att lyfta pennan från pappret och utan att rita någon linje dubbelt.

6. Kan ett torn gå runt schackbrädet genom att göra alla möjliga drag exakt en gång? (Till exempel måste den göra dragen a1-a2, a1-a3, . . . , a1-a8, a1-b1, a1-c1, . . . , a1-h1 och likadant för alla andra rutor).

7. I ett land utgår det exakt tre järnvägar från varje stad. Två bolag vill privatisera alla vägarna. Antimonopolkommittén kräver att järnvägar av båda bolagen måste utgå från varje stad. Visa att de två bolagen kan komma överens så att kravet blir uppfyllt.

8. En viss sammanhängande graf har hörn med bara jämn grad. Visa att man kan rita ut pilar på kanterna så att:

   - Det går att ta sig mellan valfria två hörn genom att gå längs med katerna i utsatt riktning.
   - Varje hörn har lika många pilar till sig som ut från sig.