Matematikcirkel Katedralskolan • 4 december 2013

Gott och Blandat

Liten tävling

Uttryck talet 2013 genom att bara använda fyror. Försök att använda så få fyror som möjligt. Tillåtna operationer är de fyra räknesätten, samt potenser. Parenteser får användas godtyckligt många gånger.

Facit: 8 stycken 4:or: $2013 = (4^4 - 4)(4 + 4) - (4 - \frac{4}{4})$. Hittills har ingen fått bättre resultat.

Problem

Lös uppgifterna i varfri ordning, själv eller med någon annan! Välj den som du/ni tycker är roligast först.

1. Jag tänker på 3 positiva heltal, alla är mindre än 100. Du får också välja tre tal (hur stora som helst) och begära mig att multiplicera mitt första med ditt första, mitt andra med ditt andra, mitt tredje med ditt tredje, och sedan uppge summan av de tre produkterna. Bestäm den minsta möjliga antalet sådana frågor för att säkert finna de tre tänkta talen.

   Facit: Det räcker med en fråga. Välj talen 1, 100 och 10000.

2. Hitta så många lösningar som möjligt till ekvationssystemet och försök att visa varför inga andra lösningar finns:

   $$\begin{cases} x^2 - yz = x \\ y^2 - zx = y \\ z^2 - xy = z \end{cases}$$

   Facit: De icke-negativa lösningarna är $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Det finns tyvärr oändligt många lösningar där variablerna får vara negativa, så uppgiften var dåligt formulerad.

3. Det finns 17 kort. En åskådare tänker på ett av dem. Trollkarlen delar upp korten i 4 högar och frågar åskådaren i vilken hög kortet ligger. Vilket är det minsta antalet frågor trollkarlen behöver för att alltid kunna bestämma åskådarens kort?

   Facit: Två frågor räcker inte eftersom då finns det bara $4 \cdot 4 = 16$ möjliga kombinationer av svar. För att klara på tre frågor, dela upp den misstänkta högen i någorlunda jämna högar hela tiden. De icke-misstänkta korten kan läggas var som helst.

4. En Rubiks kub blev tilltrasslad genom att man utförde en kombination av vridningar på starttillståndet. Visa att man kan få kuben till att vara i starttillståndet igen genom att utföra samma kombination några gånger till.

   Facit: Notera hur kuben ser ut efter varje upprepning av kombinationen. Kuben kan se ut på ändligt många sätt, alltså kommer ett utseende att upprepa sig. Vi har gått in i en period, men följer vi den baklänges, så ska perioden leda till startpositionen. Det betyder att startpositionen ingår i perioden och kommer någon gång hända i framtiden också.

5. $ABCD$ är en konvex fyrhörning, dessutom gäller $AB + BD < AC + CD$. Visa att $AB < AC$.

   Facit: Mot största sidan ligger största vinkeln. Antag att $AB \geq AC$, då följer $BD < CD$ och studera de motsående vinklarna.

6. Varje nästa element i en talföljd är lika med den sista siffran av produkten av de föregående två talen. Visa att följden

   (a) är periodisk.

   (b) har en period som inte är större än 26.

   (c) har en period som är mindre än 17.

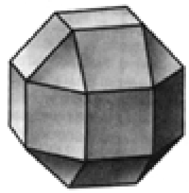
   Facit: Någon gång kommer följden att upprepa sig eftersom antalet möjliga par av siffror bredvid varandra är ändligt. Om följden innehåller 0, kommer perioden bli 1. Annars, om följden innehåller en jämn siffra, kommer all siffror vara jämna vilket ger $4 \cdot 4 = 16$ parmöjligheter. Likadant med udda siffror med 5 som specialfall.

7. Lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ xyz = 60 \end{cases}$$

   Facit: De fyra lösningarna är $(3, 4, 5)$, $(4, 3, 5)$, $(-2-\sqrt{14}, \sqrt{14}-2, -6)$, $(-2-\sqrt{14}, \sqrt{14}-2, -6)$. Detta kan man få genom att flytta z till högerledet i både den första och den andra ekvationen och sedan kvadrera den första.

8. Niklas har en bit metalltråd som är 48 cm lång. Av den vill han bygga ramen till en rombkuboktaeder med sidan 1 cm (se bild). Som minst, i hur många bitar måste Niklas klippa upp tråden för att bygga modellen?



   Facit: Niklas behöver inte klippa upp tråden, eftersom rombkuboktaederns graf har en eulerstig, dvs kan gås igenom i en cykel.

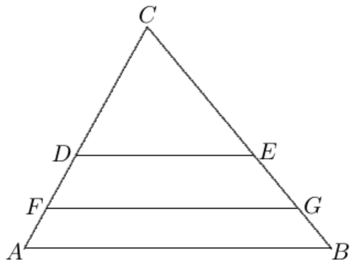
9. Redan en miljard år bestäms vädret på planeten Minecraft helt av det föregående årstiondet. Man vet att det finns nio typer av väder (magnetstorm, meteoritregn, frost osv.). Alla dagar den senaste veckan var vädret olika. Visa att det någon gång kommer en vecka med exakt samma uppsättning av dessa olika väder.

   Facit: Om det har funnits två årstionden med exakt samma väder, så betyder det att vädret har börjat upprepa sig och alla veckor som kommer nu kommer att hända igen (vi har gått in i perioden). Problemet här är att årstionden här kan se ut på väldigt många sätt (över 9^3650), så det är inte säkert att de börjat upprepa sig. Möjligen har problemet felaktig formulering.

10. Konungen Friedrich hade 5 söner. Bland hans ättlingar hade 100 stycken exakt 3 söner, medan alla andra dog utan att få några barn. Hur många ättlingar hade konungen Friedrich?

    Facit: Antalet söner som kommer från hans ättlingar är 300, således 305 ättlingar totalt.

11. Linjerna DE och FG är båda parallella med linjen AB. De tre områdena CDE, $DFGE$ och $FABG$ har lika stora areor.



Bestäm förhållandet $\frac{CD}{FA}$.

Facit: Eftersom areorna på det tre likformiga trianglarna förhåller sig som $1:2:3$ så förhåller sig de sidorna med roten ur de koefficienterna: $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$. Därför förhåller sig sträckorna i frågan som $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

12. Det finns 27 mynt: 9 enkronor, 9 tvåkronor och 9 trekronor. Bland dem finns ett falskt mynt som väger mindre än de motsvarande riktiga. En riktig enkrona väger 1g, tvåkrona 2g och trekrona 3g. Med hjälp av en balansvåg utan hjälpvikter bestäm det falska myntet på

    (a) på 4 vägningar.

    (b) på 3 vägningar.

    Facit: Först bestäm en "misstänksam" hög med 3 enkronor, 3 tvåkronor och 3 trekronor. På andra vägningen bestäm en "misstänksam" högar med en enkrona, en tvåkrona och en trekrona. Väg till sist den enkronan plus en riktig enkrona mot den tvåkronan.

13. De tre räta linjerna l, m, n är parallella. Avståndet mellan l och m är 4, avståndet mellan m och n är 3 och m ligger mellan l och n. En kvadrat, som ligger i området mellan l och n, har tre av sina hörn på var sin linje. Finn kvadratens sidlängd.

    Facit: Dra sträckor från kvadratens hörn på l och n, vinkelräta mot linjen m. Det bildas två rätvinkliga trianglar, som är kongruenta pga deras vinklar är lika och de har samma läng på hypotenusan. Alltså är den 5.

14. I ett land finns 15 städer och vissa av städerna är förbundna med flyglinjer. Tre flygbolag äger flyglinjerna i landet och man vet att även om ett av bolagen skulle lägga ner så skulle det ändå gå att ta sig från vilken stad som helst till alla andra (möjlighen med byten). Vilket är det minsta antalet flyglinjer som landet kan ha?

Facit: Vilka två bolag som helst ska ha minst 14 linjer tillsammans. Lägg ihop de tre olikheterna, dela med 2, vi får att alla bolag tillsammans ska ha minst 21 linjer. Ett exempel med 7 linjer per bolag kan konstrueras (börja med att placera 15 städer på rad och sätt ut de första två bolagens linjer varannan gång).

15. Omkretsen för en femhörnig stjärna, vars hörnpunkter bildar en konvex femhörning F, omkretsen för F, samt omkretsen för stjärnans inre femhörning är alla primtal. Visa att summan av dessa tre tal är inte mindre än 20.

    Facit: Stjärnan har störst omkrets (triangelolikheter), F har mellantalet och omkretsen för inre femhörningen är minst. Skriv upp fem triangelolikheter där F:s två närliggande sidor är iblandade. Om man summerar de fem olikheterna får man att det fördubbalde mellantalet måste vara större än summan av det största talet och mittentalet. Den enda taltrippeln med summan under 20 som uppfyller detta är (2,5,7). Tyvärr kan jag inte komma på varför dessa tal inte skulle funka, möjligen stämmer inte uppgiften!