Matematikcirkel Katedralskolan • 19 mars 2014

Principen om inklusion/exklusion - 2

Problem från förra gången

1. Visa formeln för inklusion/exklusion för tre mängder:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C|$

2. Golvet i ett litet rum på $6m^2$ är täckt med tre mattor som har arean $3m^2$ var. Visa att ett par av mattorna överlappar varandra med minst $1m^2$.

3. En kub med sidan 20 är uppdelad i 8000 likadana små kuber och i varje liten kub står ett tal. Varje rad med 20 kuber har talsumman 1 (vi betraktar rader i alla 3 riktiningar). I en liten kub står talet 10. Tre $1 \times 20 \times 20$-lager som är parallella med stora kubens sida innehåller just den lilla kuben. Bestäm summan av alla tal utanför de lagren.

4. Hur många heltal mellan 1 och 1 000 000, är varken kvadrattal, kubtal eller fjärdepotenser?

Principen för inklusion-exklusion

5. Visa formeln för inklusion/exklusion för fyra mängder:

$$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$$

6. Hitta på och bevisa formeln för inklusion/exklusion för n mängder (Tips: man kan visa det med induktion eller direkt genom att betrakta förekomsten av ett specifikt element i $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ och högerledet).

7. Matematikkursen har en grupp på 7 elever och alla skrev slutprovet. Läraren var lite trött och delade ut provet tillbaka på måfå. Vad är sannolikheten att ingen elev fick tillbaka sitt eget prov?