Tvåpotenser

1. *Gör en tabell där du räknar ut alla tvåpotenser från 2^1 till 2^{15} (för hand om du kan!).*
Lösning:

$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$
$2^8 = 256$
$2^9 = 512$
$2^{10} = 1024$
$2^{11} = 2048$
$2^{12} = 4096$
$2^{13} = 8192$
$2^{14} = 16384$
$2^{15} = 32768$

2. *Visa att 2^{30} är större än en miljard (utan att räkna ut det).*
Lösning:

$$2^{30} = 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024 \cdot 1024 \cdot 1024 > 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 1000000000$$

3. *Det här pappret är ungefär 0.1mm tjockt. Hur många gånger måste man vika det för att det ska bli 1 meter (1000 mm) tjockt?*
Lösning: Vi behöver öka tjockleken med en faktor av minst 10000. För varje gång man viker pappret på mitten ökar tjockleken med en faktor 2, så om man viker den n gånger ökar tjockleken med en faktor 2^n. Den första tvåpotensen som är större eller lika med 10000 är 2^{14} = 16384, dvs man behöver vika pappret 14 gånger.

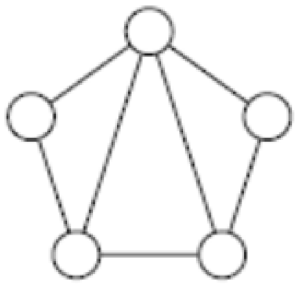
4. *Mellan vilka tvåpotenser befinner sig talet en miljon?*
Lösning: $2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024 \cdot 1024$, vilket är lite större än 1000000. Dock är det definitivt mindre än 2000000, så 2^{19} är mindre än 1000000. Alltså ligger 1000000 mellan 2^{19} och 2^{20}.

5. *Vilken slutsiffra har talet 2^{100}?*
Lösning: Notera att tvåpotensernas sista siffra går i en cykel: 2, 4, 8, 6, 2, osv. Då 6 är sista siffran för 2^4 kommer den även vara sista siffran för 2^8, 2^{12}, ..., 2^{4n}. Då 100 är delbart med 4 kommer därför 2^{100} ha sista siffran 6.

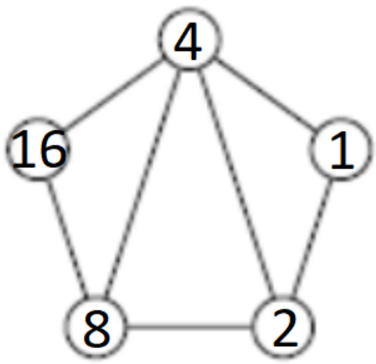
6. *Vilken rest ger talet 2^{100} vid division med 3?*
Lösning: Även resterna vid division med 3 går i en cykel, men i detta fall är cykeln lite lättare, nämligen $2, 1, 2, 1, 2, 1, ...$ Så 2^1 har 2 som rest och därefter har varannan 1 och varannan 2 som rest. För 2^{100} får vi därför rest 1.

7. *Skriv in fem positiva heltal i cirklarna så att två villkor uppfylls:*

- *Om två cirklar är kopplade med en sträcka så ska de skilja sig med faktor 2 eller faktor 4.*
- *Om två cirklar inte är kopplade så ska de inte skilja sig med faktor 2 eller faktor 4.*



Lösning: Ett möjligt svar är:



8. *Sätt ut talen $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$ och 512 i en 3x3-tabell på så sätt att produkterna av talen i varje rad, varje kolumn och i båda huvuddiagonalerna blir lika.*
Lösning: Talen vi ska sätta in är $2^1, 2^2, ..., 2^9$. Då produkten $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$ kan vi tänka oss att vi istället försöker konstruera en vanlig magisk kvadrat med siffrorna $1 - 9$. En sådan kan till exempel se ut som följer:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Denna motsvarar då:

4	128	64
512	32	2
16	8	256

9. *Visa att för varje positivt heltal n finns det ett n-siffrigt tal som är delbart med 2^n som bara består utav 1:or och 2:or (till exempel är 112 delbart med 2^3, 2112 är delbart med 2^4).*

Lösning: Först noterar vi att för $n = 1$ är 2 ett 1-siffrigt heltal skrivet med enbart ettor och tvåor som är delbart med 2^1. Låt oss nu anta att det för $n = k$ finns ett k-siffrigt heltal m skrivet med endast ettor och tvåor som är delbart med 2^k. Låt oss nu kolla på heltalen $10^k + m$ och $2 \cdot 10^k + m$. Dessa är båda $m + 1$-siffriga heltal skrivna med endast ettor och tvåor. Vi får två fall:

1) $10^k + m$ är delbart med 2^{k+1}. I sådant fall är vi klara.

2) $10^k + m$ är ej delbart med 2^{k+1}. Dock vet vi att både 10^k och m är delbart med 2^k, så vi måste få rest 2^k när vi delar $10^k + m$ med 2^{k+1}. Detta innebär att $2 \cdot 10^k + m = 10^k + (10^k + m)$ är delbart med 2^{k+1} då 10^k också ger rest 2^k vid division med 2^{k+1}. Alltså finns det ett $k + 1$-siffrigt heltal med endast ettor och tvåor som är delbart med 2^{k+1}.

Vi vet då att det finns för $n = 1$ och att om det finns för $n = k$ så finns det för $n = k + 1$. Därför finns det för alla positiva heltal n.

EPA

1. *En låda innehåller 4 gröna, 14 blåa och 24 röda klot. Sofia plockar upp ett slumpmässigt klot i taget utan att lägga tillbaks det.*

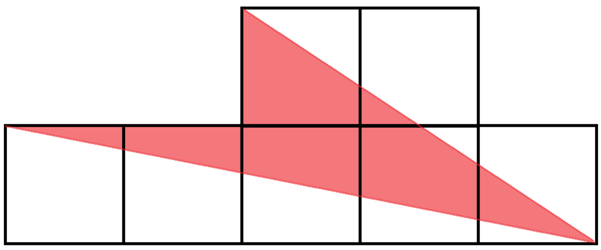
(a) *Hur många klot måste hon plocka upp för att vara säker på att få fem klot av samma färg?*

Lösning: Hon kan teoretiskt sett plocka upp 12 stycken och få 4 av varje färg men plockar hon upp 13 så måste hon få 5 av minst en. Alltså är svaret 13.

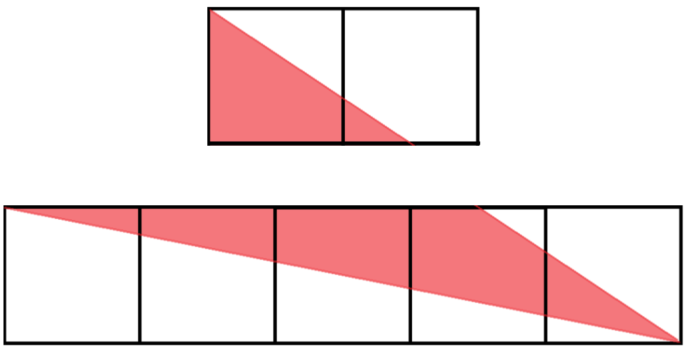
(b) *Hur många klot måste hon plocka upp för att vara säker på att få fem röda klot?*

Lösning: Det är möjligt för henne att plocka upp 22 och få 4 gröna, 14 blåa och endast 4 röda, men plockar hon upp 23 kommer hon garanterat att plocka upp 5 röda, då det bara totalt finns 18 klot som inte är röda. Svaret är därför 23.

2. *Vilken area är störst, den färgade eller icke-färgade?*



Lösning: Vi kan dela upp figuren i två delar:



I båda dessa delar kan vi enkelt se att mer än hälften av arean är icke-färgad, så den icke-färgade arean är totalt sett störst.

3. *Beräkna siffersumman av alla heltal mellan* 1 *till* 10000*.*

$$1+2+3+4+5+...+(9+9+9+9)+(1+0+0+0+0)=?$$

Lösning: Låt oss tänka oss varje tal upp till 9999 som en fyrsiffrig sträng av siffror, dvs 1 är 0001 och 153 är 0153. Detta förändrar inte siffersumman då vi endast lägger till nollor. Då får vi att talen från 0 till 9999 motsvarar alla möjliga strängar med 4 siffror, så vi får lika många av varje siffra. totalt sett har vi 40000 siffror, så vi får 4000 av varje. Summan blir alltså $4000\cdot(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)=180000$. Men då har vi inte räknat med 10000, så totalt får vi 180001.