Balansvågen

1. *Emil har vikterna 1g, 2g, 4g, 8g, 16g samt 32g.*

(a) *Han lägger en kaka på 25 g i den vänstra skålen. Vilka vikter ska han lägga i högra skålen för att få jämvikt?*

Lösning: 1g, 8g och 16g då $1 + 8 + 16 = 25$.

(b) *Han lägger en kaka på 25 g samt några av vikterna i vänstra skålen, alla andra vikter lägger han i högra skålen. Bestäm för varje vikt var den ligger.*

Lösning: Den totala vikten som ligger på vågen är $25\text{g} + 1\text{g} + 2\text{g} + 4\text{g} + 8\text{g} + 16\text{g} + 32\text{g} = 88\text{g}$. Så på varje sida av vågen behöver det ligga exakt 44g. Det får vi genom att lägga 1g, 2g, och 16g i den vänstra skålen och 4g, 8g och 32g i den högra skålen.

2. (a) *Tre mynt ser likadana ut. Man vet att exakt ett av dem är falskt (men man vet inte vilket). Man vet även att alla äkta mynt väger lika mycket samt att det falska myntet är något lättare. Hur kan man bestämma det falska myntet med en enda vägning?*

Lösning: Vi väljer två av de tre mynten och väger dem mot varandra. Om de väger lika mycket är det det tredje myntet som är falskt och om det ena väger mindre så är det falskt.

(b) *9 mynt ser likadana ut. Man vet att exakt ett av dem är falskt (men man vet inte vilket). Man vet även att alla äkta mynt väger lika mycket samt att det falska myntet är något lättare. Hur kan man bestämma det falska myntet med högst två vägningar?*

Lösning: Vi delar upp mynten i tre högar med tre mynt i varje och väger två av högarna mot varandra. På samma sätt som i **(a)** kan vi då lista ut i vilken av högarna som det falska myntet ligger. Då har vi tre mynt varav ett är falskt och vi kan göra exakt som i **(a)** för att avgöra vilket av dem som är falskt.

3. (a) *Det finns 4 paket som alla väger olika. Hur många gånger behöver man väga (utan vikter) för att bestämma det lättaste paketet?*

Lösning: Vi kan aldrig säkert bestämma det lättaste paketet på endast två vägningar, då vi behöver väga paket två och två för att säkert kunna avgöra vilket av de vägda paketen som väger minst. Om vi delar in paketen i två par och hittar det lättaste paketet i varje par behöver vi två vägningar. När vi tagit ut det lättaste från båda paren behöver vi en till vägning för att avgöra vilket av dessa två som är lättast. Alltså krävs tre vägningar.

(b) *Det finns 4 paket som alla väger olika. Hur många gånger behöver man väga (utan vikter) för att bestämma både det lättaste och det tyngsta paketet?*

Lösning: Vi börjar på samma sätt som i den förra med att väga dem parvis och får då fram både det lättaste och det tyngsta paketet i varje par. Då behövs som sagt en vägning till för att ta fram det lättaste paketet och på samma sätt en vägning till för att ta fram det tyngsta paketet. Alltså krävs totalt fyra vägningar.

4. *På ett lager finns det sylar, prylar och mylar. En syl består av 5 suttrar, en pryl av tre puttrar, en myl av två muttrar. Samtliga suttrar är likadana, likaså puttrar och muttrar. Jakob har en balansvåg utan vikter. Hans uppdrag är genom en enda vägning bestämma vilket som är tyngre: två suttrar eller en putter med en mutter. Tyvärr får inga ting på lagret plockas isär. Hur kan Jakob klara uppdraget?*

Lösning: Istället för att ta reda på om två suttrar väger mer än en putter med en mutter kan han ta reda på om 60 suttrar väger mer än 30 puttrar med 30 muttrar. Detta kan han göra genom att ta 12 sylar och väga dessa mot 10 prylar och 15 mylar.

5. *Man vill beställa 4 vikter. De skall räcka för att uppväga vilken tyngd som helst bland 1g, 2g, 3g,. . . , 15g. Vid uppvägning måste vikterna placeras på motsatt skål (inte samma som tygnden ligger på). Vad ska man beställa för vikter?*

Vikterna 1g, 2g, 4g och 8g fungerar:

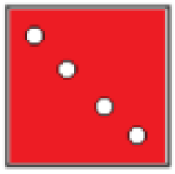
$$\begin{aligned}
1\text{g} &= 1\text{g} \\
2\text{g} &= 2\text{g} \\
3\text{g} &= 1\text{g} + 2\text{g} \\
4\text{g} &= 4\text{g} \\
5\text{g} &= 1\text{g} + 4\text{g} \\
6\text{g} &= 2\text{g} + 4\text{g} \\
7\text{g} &= 1\text{g} + 2\text{g} + 4\text{g} \\
8\text{g} &= 8\text{g} \\
9\text{g} &= 1\text{g} + 8\text{g} \\
10\text{g} &= 2\text{g} + 8\text{g} \\
11\text{g} &= 1\text{g} + 2\text{g} + 8\text{g} \\
12\text{g} &= 4\text{g} + 8\text{g} \\
13\text{g} &= 1\text{g} + 4\text{g} + 8\text{g} \\
14\text{g} &= 2\text{g} + 4\text{g} + 8\text{g} \\
15\text{g} &= 1\text{g} + 2\text{g} + 4\text{g} + 8\text{g}
\end{aligned}$$

6. *Man vill beställa 3 vikter. De skall räcka för att uppväga vilken som helst tyngd bland 1g, 2g, 3g,..., 13g. Vid uppvägning får vikterna placeras på båda skålar. Vad ska man beställa för vikter?*
Lösning: Vikterna 1g, 3g och 9g fungerar:

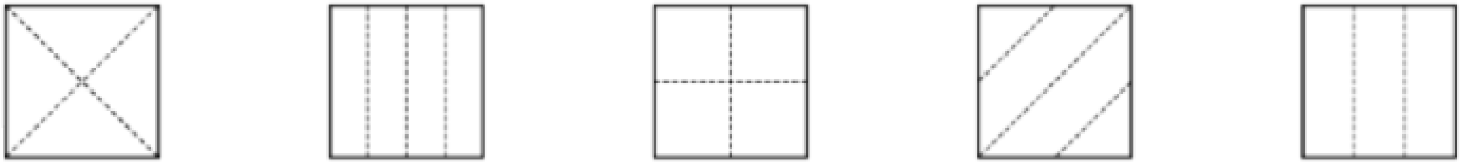
$$\begin{aligned}
1\text{g} &= 1\text{g} \\
2\text{g} &= 3\text{g} - 1\text{g} \\
3\text{g} &= 3\text{g} \\
4\text{g} &= 3\text{g} + 1\text{g} \\
5\text{g} &= 9\text{g} - 3\text{g} - 1\text{g} \\
6\text{g} &= 9\text{g} - 3\text{g} \\
7\text{g} &= 9\text{g} - 3\text{g} + 1\text{g} \\
8\text{g} &= 9\text{g} - 1\text{g} \\
9\text{g} &= 9\text{g} \\
10\text{g} &= 9\text{g} + 1\text{g} \\
11\text{g} &= 9\text{g} + 3\text{g} - 1\text{g} \\
12\text{g} &= 9\text{g} + 3\text{g} \\
13\text{g} &= 9\text{g} + 3\text{g} + 1\text{g}
\end{aligned}$$

Blandade uppgifter

1. *Frida tog en röd pappersservetet, vek ihop den några gånger och gjorde ett hål genom den. Sen vek hon upp servetten igen och fick följande:*



Vilken av bilderna nedan visar viklinjerna?



Lösning: När Frida vek ihop servetten måste de fyra punkterna som nu har hål i sig ha sammanfallit, då hon bara gjorde ett hål. Den enda av bilderna som hade gjort så att punkterna sammanfallit är bild 4.

2. *Leon försöker gissa det hemliga lösenordet till familjens dator. Han testar bokstavskombinationerna EOLN, ELNO och LEON men inget av dem funkar. Det visade sig att varje test var nära rätt lösenord och han skulle bara ha bytt på två av bokstäverna i varje fall. Vad är lösenordet till datorn?*
Lösning: I varje försök hade Leon helt rätt på två bokstäver och fel position på de andra två. Det innebär att han totalt sett hade 6 rätt på sina tre försök. Då det bara finns fyra bokstäver måste han därför ha haft rätt på samma bokstav i två olika ord minst två gånger. Då det bara är två bokstäver som förekommer på samma plats i två olika ord, nämligen E som första bokstav och N som sista bokstav, mäste dessa två vara rätt. Alltså är det antingen EOLN eller ELON. Men han gissade EOLN och fick fel, så det måste vara ELON.

3. *Sara har ett rektangulärt papper. Bredden på pappret är 23 millimeter och längden är 71 millimeter. Varje gång klipper Sara pappret med ett rakt snitt så att en kvadrat klipps av. Sedan lägger hon kvadraten åt sidan och fortsätter. Hur många kvadrater kan hon som mest få i slutändan?*
Lösning: Med ett rakt snitt kan hon alltid bara klippa ut en kvadrat som har samma sidlängd som en av rektangelns sidlängder. Dessutom måste det vara den kortare sidans längd, då den längre sidan hade gett en för stor kvadrat för att rymmas inom rektangeln. Alltså klipper hon först ut tre kvadrater med sidlängden 23 millimeter, då får hon kvar en rektangel av mått 2x23. Därefter kan hon bara klippa ut 11 kvadrater med sidlängd 2, och hon får kvar en rektangel av mått 2x1. Därefter klipper hon en gång till och får två kvadrater till med sidlängd 1. Totalt blir det alltså 16 kvadrater.

4. *Arne Alligator och 29 av hans vänner – apor och andra alligatorer – ställde sig i en cirkel. Var och en av dem, med start från Arne, säger ett tal till sin vänstra granne i cirkeln. Till en alligator säger en alligator ett tal som är 1 mindre än det talet den hörde. Till en apa säger en apa ett tal som är 1 mer än det talet den hörde. I andra situationer skickade djuren samma tal vidare som de hörde. Hur många apor fanns i cirkeln om Arne Alligator fick ett tal tillbaka som var 5 mer än det han skickade?*
Lösning: Säg att det är ett visst antal alligatorer som står efter varandra först (med start från Arne) och sedan står alla aporna. Om Arne säger sitt tal så måste alla andra alligatorerna sänka talet och aporna måste sedan höja talet med 5 mer, emellan dem ändras inte talet. Då måste aporna vara 5 fler än alligatorerna utan Arne, så då är de 17 stycken, medan alligatorerna är 12, och så Arne.

Om grupperna med alligatorer och apor står huller om buller, men Arne fortfarande är i början av en alligator-grupp, så sker samma sak. (Ett djur kan själv också bilda en grupp om dess grannar är av annan sort.) Alligator-grupper sänker talet, ap-grupper höjer talet, men djuren på gränserna förändrar inte talet. Det är dock lika många apor som alligatorer som inte förändrar talet (de som skickar talet till nästa grupp), så fortfarande måste det vara 5 fler apor än alligatorer utan Arne och då är vi återigen på svaret 17 apor.

Om Arne inte är först i sin alligator-grupp så kommer det ske en minskning med talet till (när talet kommer tillbaka till Arne) och då måste aporna höja talet med 6 mer. Det går inte eftersom man inte kan dela upp djuren utan Arne på så sätt att skillnaden blir 6 (17-12=5, men 18-11=7).

5. *Jonathan skriver upp tal på en rad på tavlan. Först skrev han upp två tal. Sedan adderade han talen och skrev upp summan som blev det tredje talet på tavlan. Sedan lade han ihop det andra och det tredje talet och skrev ihop summan som det fjärde talet. Han fortsatte göra på samma sätt – lade ihop de två senaste talet för att få nästa. Han slutade när han hade sex tal på tavlan. Det femte talet blev lika med 9. Vad blev summan av alla tal på tavlan lika med?*

Lösning: Låt oss anta att vi började med talen a och b. Då får vi att talen på tavlan blir:

$$\begin{aligned} a \\ b \\ a+b \\ a+2b \\ 2a+3b \\ 3a+5b \end{aligned}$$

Deras summa blir $8a + 12b = 4 \cdot (2a + 3b)$, men då $2a + 3b$ var det femte talet som var lika med 9 vet vi att summan blir $4 \cdot 9 = 36$.